

ARGOMENTO N° 5

" Lastre piane "



7.1. GENERALITÀ

a) Si definisce lastra piana sottile un solido avente lo spessore molto più piccolo delle dimensioni delle facce superiore e inferiore ( $s \ll l_x, l_y$ ); di conseguenza, adottato un riferimento cartesiano con gli assi  $x, y$  (giacenti sul piano medio della lastra), è possibile supporre che le fibre secondo  $z$ , molto più corte delle altre, rimangano indeformate anche dopo l'applicazione dei carichi, ossia che ogni fibra normale alla lastra si conservi di uguale lunghezza, rettilinea e normale alla superficie media deformata; e poiché si considera allora la dilatazione  $\epsilon_z$  nulla in ogni punto, le lastre praticamente vengono dette corpi bidimensionali.

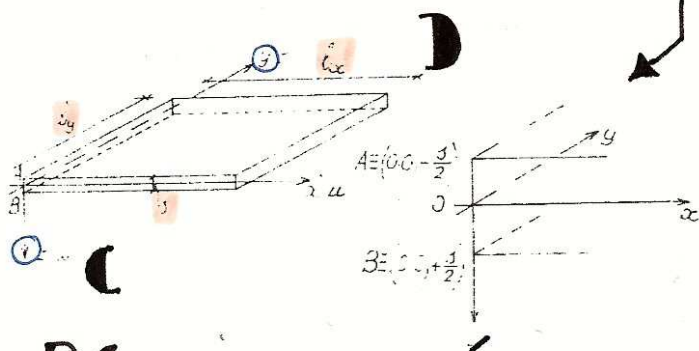


Fig. 7.1

P.S.

Nel presente capitolo si tratterà il problema della lastra inflessa, caricata cioè con forze agenti normalmente al piano medio. Pertanto la deformata assumerà curvature non nulle sia nel piano  $x, z$  ( $\frac{1}{\rho_x}$ ), sia nel piano  $y, z$  ( $\frac{1}{\rho_y}$ ); inoltre le dilatazioni ( $\epsilon_x, \epsilon_y$ ), vedremo cioè in seguito, verranno considerate nulle sul piano medio, come per le travi inflesse si considera nulla la dilatazione  $\epsilon_x$  lungo il loro asse  $x$ .

b. Una prima osservazione,

è che anche in una struttura in cui le reazioni vincolari sono risultano incognite le distribuzioni delle

azioni interne unitarie

cioè le azioni interne che impegnano le ideali strisce di larghezza unitaria, dalle quali si può pensare costituita la lastra.

Così, ad esempio, mentre nel caso di fig. 7.2 è noto il momento flettente  $M_x$  nella sezione 1-1, e quindi anche il momento unitario  $m_x$  cioè  $m_{x, medio} = M_x/b$ , risulta incognita la distribuzione delle azioni interne  $m_x$ , tali per cui  $M_x = \int m_x dy$ .

Siamo quindi in presenza di un tipo di struttura che possiede un elevato grado di iperstaticità interna diffusa su tutta la sua estensione.

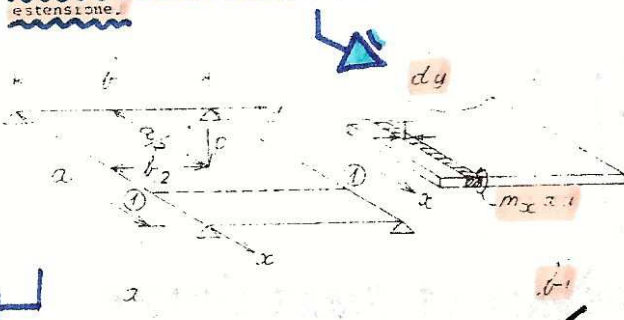


Fig. 7.2

Schematizzata ancora, in prima approssimazione, la lastra come un doppio ordito di strisce di larghezza unitaria fra loro ortogonali (fig. 7.3), appare chiaro che ogni porzione di carico si ripartisce fra entrambe le strisce intersecantesi nella zona di incrocio

Ne consegue che insorgono azioni interne unitarie sia secondo l'asse  $x$  ( $m_x$  e  $t_x$ ), sia secondo l'asse  $y$  ( $m_y$  e  $t_y$ ).

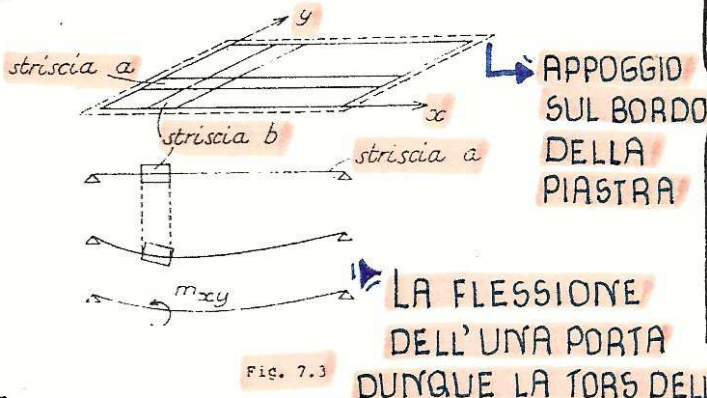


Fig. 7.3

Si osserva inoltre che alle azioni interne prima ricordate si accompagnano inevitabilmente i momenti torcenti  $m_{xy}$  e  $t_{yx}$  necessari ad assicurare la congruenza fra la deformata di una striscia con quella ad essa ortogonale (fig. 7.3).

Infine,

vi è da osservare che la sezione di un'ideale striscia unitaria per effetto di un momento flettente che comprime le fibre superiori modifica la sua forma, tenuto conto del fenomeno della dilatazione trasversale ( $\epsilon_y = -\nu \epsilon_x$ ). In realtà la presenza delle strisce adiacenti, a cui quella in esame è solidale, contrasta tale libera espansione, facendo sorgere quindi uno stato di tensione anche nelle ideali fibre dirette secondo  $y$  ( $\sigma_y = -\nu \sigma_x$ ), nel caso di totale impedimento di  $\epsilon_y$ .

## LETTURA:

### 7.2. DEFINIZIONE DELLE AZIONI INTERNE E CONVENZIONI SUI LORO SEGNI

Volendo precisare quanto è stato accennato in precedenza, considerata ad esempio per una lastra comunque vincolata e caricata, una sezione normale all'asse  $x$  (fig. 7.2b), occorre conoscere il valore delle azioni interne per tutte le strisce parallele a  $x$  recise dalla stessa sezione.

Se con  $m_x, m_y, t_x$  si indicano le funzioni che rappresentano tali azioni interne, sulla sezione larga  $dy$  di una generica striscia parallela a  $x$  agiscono le sollecitazioni ( $m_x dy$ ), ( $m_y dy$ ), ( $t_x dy$ ). Le quantità  $m_x, m_y, t_x$ , essendo le sollecitazioni che agirebbero su una sezione pensata di larghezza 1, vengono frequentemente dette "azioni unitarie": le dimensioni fisiche sono di un momento su una lunghezza (FL/L) per le prime due (esprese quindi, ad esempio, in kgcm/cm); e di una forza per unità di lunghezza per la terza (espressa ad esempio in kg/cm). Analoghe osservazioni possono esser fatte per una sezione che interessi le strisce parallele a  $y$ , per le quali le azioni interne unitarie saranno  $m_y, m_x, t_y$ .

Da tutto ciò consegue che, considerato un elemento della lastra avente la base  $dx, dy$  e l'altezza  $s$  (fig. 7.4), sulla faccia 1-2 agiscono le sollecitazioni ( $m_x \cdot dy$ ), ( $t_x \cdot dy$ ), ( $m_y \cdot dy$ ), e sulla faccia 1-3 ( $m_y \cdot dx$ ), ( $t_y \cdot dx$ ), ( $m_x \cdot dx$ ); ed è chiaro che sulle facce vicinissime 3-4, 2-4 le sollecitazioni si invertono incrementandosi di quantità piccolissime pari ai rispettivi differenziali. Nella stessa fig. 7.4 sono indicati i segni considerati positivi per le varie azioni interne.

Poiché i momenti torcenti sono generati da tensioni tangenziali parallele ai lembi, essendo  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  si ha anche  $m_{xy} = m_{yx}$ .



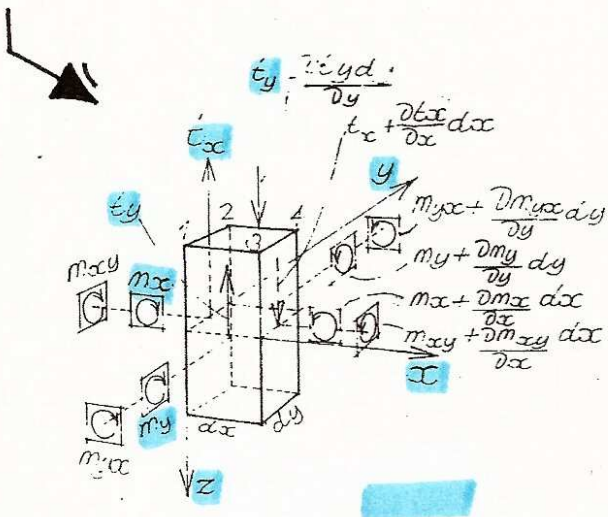


Fig. 7.4

Per tanto per ogni elemento della lastra le azioni interne incognite sono 5, mentre si hanno a disposizione soltanto 3 equazioni di equilibrio, poichè non interessano quelle alla traslazione secondo  $x, y$ , e poichè una terza (di equilibrio giroscopico intorno all'asse  $z$ ) è stata utilizzata per ricavare la relazione  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Quindi si ha conferma del fatto che il problema è staticamente indeterminato e che è indispensabile il ricorso a considerazioni di natura elastica; vedremo che la difficoltà verrà aggravata introducendo, quale ulteriore funzione incognita, la superficie elastica, o sia lo spostamento  $w$  secondo  $z$ , per cui determinati i legami tra le azioni interne e la superficie elastica, è possibile assumere quest'ultima come unica incognita; tale modo di procedere è evidentemente nello spirito del metodo dell'equilibrio.

## LETTURA:

### 7.3. LE IPOTESI

La teoria delle lastre sottili inflesse (di Kirchhoff) si basa sulle seguenti ipotesi:

a) Conservazione della normale rettilinea (equivalente alla conservazione delle sezioni piane per i solidi prismatici): come è stato accennato nella premessa, è legittimata dall'avere supposto che la lastra sia sottile, ed implica la trascurabilità della deformazione dovuta al taglio; le dilatazioni, e anche gli scorrimenti nei piani orizzontali (Fig. 7.7), variano linearmente lungo lo spessore.

b) Validità della legge di Hooke.

c) Spostamenti verticali  $w$  piccoli rispetto allo spessore della lastra: consegue da ciò che, ad esempio secondo  $x$  (fig. 7.5); a una dilatazione positiva della fibra d'intradosso,  $z = +\frac{s}{2}$ , corrisponde una variazione della rotazione  $\varphi_x$  negativa

$$\varphi_x \approx \tau_x \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \bar{\epsilon}_x = -\frac{s}{2} \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \approx -\frac{s}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad [a]$$

inoltre tale ipotesi implica la trascurabilità delle dilatazioni  $\epsilon_x, \epsilon_y$  nel piano medio;

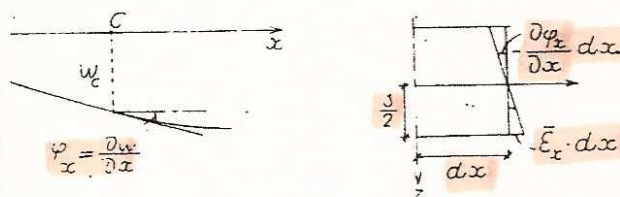


Fig. 7.5

### 7.4. RELAZIONI FONDAMENTALI

Si indicheranno con i simboli soprastegnati i valori massimi delle tensioni e delle deformazioni specifiche.

#### a) - Relazioni tra azioni interne e tensioni

oltre alla validità della legge di Hooke, la variazione lineare nello spessore della lastra sia delle dilatazioni, sia degli scorrimenti nei piani orizzontali (punto 7.3.a), i momenti flettenti danno luogo a tensioni normali distribuite linearmente, variabili da zero sul piano medio sino a un valore  $\sigma$  sui lembi; e i momenti torcenti danno luogo a tensioni tangenziali variabili anch'esse linearmente. Per cui può scriversi

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \frac{1 \cdot s^2}{6}, \quad \bar{\sigma}_y = \sigma_y \frac{1 \cdot s^2}{6}, \quad \bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy} \frac{1 \cdot s^2}{6} \quad [7.1]$$

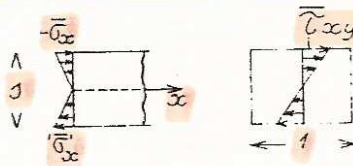


Fig. 7.6

Invece agli sforzi taglianti corrispondono tensioni tangenziali dirette secondo  $z$  (distribuite come per la sezione rettangolare 1.s di una trave) e di valore massimo, a metà spessore:

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{3}{2} \frac{\tau_{xz}}{1 \cdot s}, \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{3}{2} \frac{\tau_{yz}}{1 \cdot s} \quad [7.2]$$

#### b) - Relazioni tra tensioni e deformazioni specifiche ( $\epsilon, \gamma$ )

Per la legge di Hooke generalizzata:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_x + \nu \bar{\epsilon}_y), \quad \bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_y + \nu \bar{\epsilon}_x),$$

$$\bar{\tau}_{xy} = G \gamma_{tot} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{tot} \quad [b]$$

#### c) - Relazioni tra deformazioni specifiche e superficie elastica

Per l'ipotesi del punto 7.3 (relaz. 1) :

$$\bar{\epsilon}_x = -\frac{s}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \bar{\epsilon}_y = -\frac{s}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad [c]$$

inoltre per le medesime ipotesi e per quanto mostra la fig. 7.7:

$$\bar{\gamma}_{xy} dx = -\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} dx\right) \frac{s}{2}, \quad \bar{\gamma}_{yx} dy = -\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} dy\right) \frac{s}{2},$$

$$\bar{\gamma}_{tot} = \bar{\gamma}_{xy} + \bar{\gamma}_{yx} = -s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad [d]$$

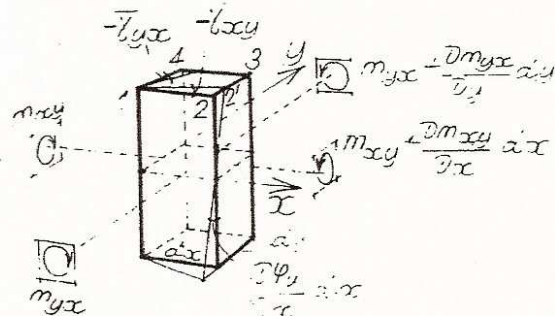


Fig. 7.7



# PER RISOLVERE LA PIASTRA, IMPOSTIAMO L'EQUAZIONE DI LAGRANGE: (TRASCURA LA DIMOSTRAZIONE):

## 1) - Relazioni tra azioni interne e superficie elastica

Dalle precedenti relazioni si ottiene:

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{S}{2} (\psi''_x + \nu \psi''_y), \quad \bar{\sigma}_y = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{S}{2} (\psi''_y + \nu \psi''_x),$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -(1-\nu) \frac{E}{1-\nu^2} \frac{S}{2} \psi''_{xy} \quad [7.1]$$

quindi, sostituendo nelle [7.1] e posto

$$B = \frac{ES^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \text{E } P = \text{CARICO VERTICALE DIST.}$$

risulta

$$m_x = -B(\psi''_x + \nu \psi''_y), \quad m_y = -B(\psi''_y + \nu \psi''_x), \quad m_{xy} = -(1-\nu)B \psi''_{xy} \quad [7.4]$$

Tali tre relazioni derivano dalle tre relazioni di congruenza [c], [d]; restano da utilizzare le tre equazioni di equilibrio. Scrivendo, per un elemento della lastra, quelle alla rotazione intorno agli assi  $y$  e  $x$ , si ottiene (fig. 7.8):

$$\tau_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}, \quad \tau_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x},$$

e tenendo conto delle [7.4],

$$\tau_x = -B \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right), \quad \tau_y = -B \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \right) \quad [7.5]$$

Infine, per l'equilibrio alla traslazione secondo  $z$ , considerando l'elemento soggetto al carico esterno  $p \cdot dx \cdot dy$ , risulta (fig. 7.9):

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + p = 0,$$

e tenendo conto delle [7.5]

$$\text{CIOE' } \nabla^4 w = \frac{p}{B} \quad [7.6]$$

Questa equazione è nota come "equazione di Lagrange", in quanto che questi la ricavò nella forma definitiva nel 1811 ri-elaborando un precedente contributo di Sophie Germain.

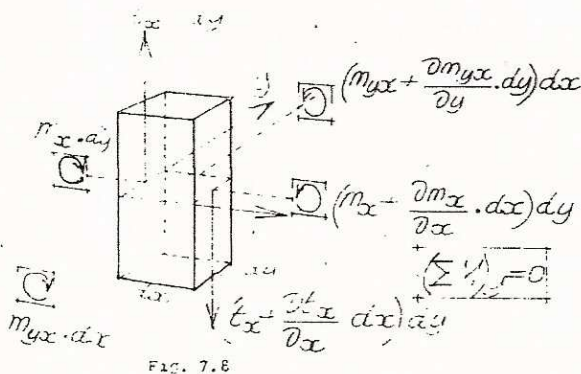


FIG. 7.8

Ottenuta, quando è possibile, la funzione  $w$  da tale equazione, mediante le relazioni [7.4] e [7.5] si possono calcolare le azioni interne in ogni punto.

Della [7.6] ormai si conoscono le soluzioni relative ai più importanti casi di vincolo, ma non si è in possesso della soluzione

general.

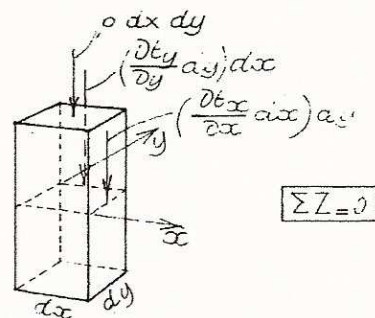


Fig. 7.9

## CI SONO POI POSTE DAI VINCOLI

### 7.5. LE CONDIZIONI AL CONTERNO

7.5.1. Se si indicano con  $x$  e  $y$  le direzioni normale e tangente al contorno in un generico punto di questo, si hanno per i più importanti casi le seguenti condizioni:

a) contorno incastrato

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad [7.7]$$

b) contorno appoggiato soggetto al momento esterno  $m_{x0}$

$$w = 0, \quad -B(\psi''_x + \nu \psi''_y) = m_{x0} \quad [7.8]$$

c) contorno libero soggetto a momenti  $m_{x0}$  e a forze distribuite  $q_{x0}$ ; in termini rigorosi le condizioni ai limiti sono che le tre componenti dell'azione interna debbono eguagliare le corrispondenti azioni esterne. Ma Kirchhoff dimostrò (1850) che una di tali condizioni è di troppo, in seguito all'ipotesi della conservazione della normale rettilinea e al conseguente diminuito numero di gradi di libertà per la lastra; e che esse si riducono quindi alle due seguenti

$$m_x = m_{x0}, \quad \tau_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = q_{x0} \quad [7.9]$$

le quali, tenendo conto delle relazioni [7.4], [7.5], possono venire scritte nella forma:

$$-B(\psi''_x + \nu \psi''_y) = m_{x0}, \quad -B \left[ \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right] = q_{x0} \quad [7.10]$$

La dimostrazione di Kirchhoff, impeccabile sotto il punto di vista deduttivo, lascia in ombra gli aspetti fisici del problema e da essa non risultano evidenti le ragioni per le quali non appaia la parte finita del momento torcente e la derivata di questo venga assorbita nella relazione riguardante il taglio. Thomson e Tait (1867) diedero di essa un'interpretazione semplificata: si consideriamo il contorno della lastra sottoposto ad una distribuzione di momenti torcenti, per il principio di Saint Venant appare lecito sostituire l'azione relativa al tratto infinitesimo 1-2 lungo  $dy$  (fig. 7.10) con due forze verticali  $V_x$  tali che

$$V_x dy = m_{xy} dy$$

da cui

$$V_x = \tau_{xy}$$

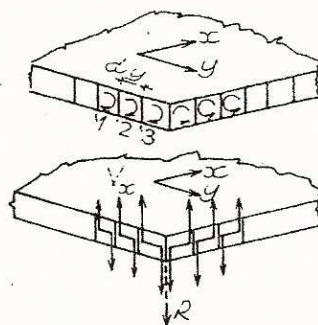


Fig. 7.10



pensando di eseguire un'analoga operazione per il tratto seguente 2-3, l'azione concentrata deve valere

$$(v_x + d_y v_x) dy = (m_{xy} + d_y m_{xy}) dy$$

e pertanto, in corrispondenza del confine dei due tratti considerati, rimane il solo incremento della forza  $v_x$  pari a

$$d_y v_x = \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy$$

tale differenziale è relativo al tratto  $dy$ , quindi la corrispondente azione tagliante unitaria risulta

$$q_x = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

e questa va ad aggiungersi al taglio  $t_x$ , per cui si ottiene la seconda delle [7.5].

Dove il contorno presenta un brusco cambiamento di direzione, le forze consecutive non si eliminano e rimane pertanto una forza concentrata; in particolare se l'angolo è retto ed è quindi  $m_{xy} = m_{yx}$ , tale azione concentrata in corrispondenza dell'angolo vale:

$$R = 2 m_{xy} \quad [7.11]$$

Il ragionamento di Thomson e Tait non mette in luce la circostanza essenziale per la quale le condizioni di Kirchhoff sono quelle che corrispondono all'impiego dell'equazione di Lagrange; tuttavia da esso, a parte l'utilità derivante dalla semplice raffigurazione, si può trarre il rilievo che l'errore conseguente all'impiego dell'equazione di Lagrange e alle correlative condizioni ai limiti, interessa una stretta fascia perimetrale della lastra, larga all'incirca quanto lo spessore.

In definitiva possiamo osservare che, quando si impieghi l'equazione di Lagrange, sul contorno è necessario operare in termini di azioni fittizie taglianti anziché di azioni torcenti.

7.5.2. Le condizioni di vincolo verranno sempre raffigurate segnando un tratteggio inclinato lungo il contorno incastrato; un tratteggio parallelo al bordo, nel caso che questo sia appoggiato; e un semplice segno continuo per il contorno libero (fig. 7.11).

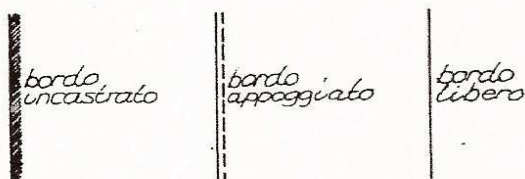


Fig. 7.11

#### 7.6. I CASI NEI QUALI È STATO POSSIBILE RISOLVERE L'EQUAZIONE DI LAGRANGE

Si è già fatto cenno all'impossibilità di disporre di una soluzione dell'equazione di Lagrange per qualunque condizione di forma e di vincolo: sappiamo che la soluzione generale, essendo l'equazione del 4° ordine, deve contenere quattro funzioni arbitrarie, da determinare con le condizioni al contorno; ma è per l'appunto quest'operazione che pone le più gravi difficoltà. Alle volte la soluzione dell'equazione di Lagrange può esser fornita in forma chiusa e con l'impiego di funzioni elementari: è per esempio il caso della lastra ellittica incastrata o quello più importante della lastra circolare appoggiata o incastrata. In altri casi è possibi-

le, disponendo di funzioni che spontaneamente soddisfano certe condizioni di vincolo, svilupparle in serie in modo da rendere ovunque soddisfatta l'equazione di Lagrange: Navier, nel 1820, ancor prima che venisse messa a punto la deduzione della stessa equazione che Lagrange aveva lasciato senza dimostrazione (Poisson, 1828), diede, per la lastra rettangolare appoggiata al contorno, le prime soluzioni, ancora oggi impiegate, sotto forma di serie doppie trigonometriche; e, circa un secolo dopo, Lévy (1922) impiegò ancora serie doppie per la risoluzione del solaio a fungo.

Un notevole passo avanti venne fatto da Lévy (1899), che dimostrò la possibilità di ottenere, per la lastra rettangolare, la soluzione mediante serie semplici: la presenza delle funzioni trigonometriche ancora fissava le condizioni di vincolo lungo due lati opposti, ma lungo gli altri due qualunque situazione poteva essere esaminata.

Molti altri studi si posero nella scia di tali fondamentali soluzioni, e oggigiorno si dispone della conoscenza di gran parte dei casi che più frequentemente s'incontrano nella progettazione. Ma le soluzioni rigorose, nell'ambito s'intende delle approssimazioni insite nell'impiego dell'equazione di Lagrange, trovano, come si è detto, limiti per ora invalicabili nei confronti della risoluzione generale del problema della lastra piana. Per cui risultati numerici è possibile ottenerli soltanto sconfinando nel campo delle differenze finite o degli elementi finiti: Nielsen e Marcus (1919) ricorsero appunto ai metodi alle differenze finite, e mostrarono come possa venire affrontato lo studio delle possibili condizioni di vincolo. Marcus spezzò l'equazione differenziale del quart'ordine in due del secondo, ciò che portò alla ribalta, oltre alla funzione  $w$ , una seconda funzione incognita legata ai momenti flettenti; appare tuttavia preferibile operare direttamente sull'equazione del quart'ordine. Zienkiewicz e altri dettero avvio ad ampie trattazioni numeriche di problemi di lastre inflesse con il metodo agli elementi finiti impiegando opportuni codici di calcolo automatico.

#### 7.7. L'IMPiego DELLE DIFFERENZE FINITE NELLO STUDIO DELLE LASTRE RETTANGOLARI

##### 7.7.1. Le relazioni generali

Come è noto la risoluzione delle equazioni differenziali impiegando le "differenze finite" (7.1) si fonda sulla circostanza che, se di una funzione, continua assieme alle sue derivate, si conoscano i valori della funzione stessa nell'intorno di un punto  $k$ , è possibile calcolare, s'intende in modo approssimato, i valori della derivata prima e delle successive come rapporti incrementali finiti. Nel caso quindi delle lastre piane, pensata la lastra, comunque vincolata e caricata, suddivisa in un numero conveniente di nodi posti nei vertici di un reticolo, ad esempio ortogonale (fig. 7.12), per ciascun nodo  $k$  si esprimono, in funzione dei valori che la funzione incognita  $w(x, y)$  assume nel punto  $k$  e nei punti adiacenti, i valori delle derivate che figurano nell'equazione di Lagrange. Nell'ipotesi di  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$  e di  $B$  costante risulta:

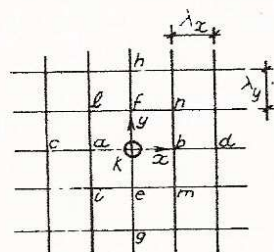


Fig. 7.12

$$\begin{aligned} 20 w_k - 8(w_a + w_b + w_c + w_d + w_e + w_f + w_g + w_h + w_i + w_j + w_k + w_l + w_m + w_n + w_o + w_p + w_q + w_r + w_s + w_t + w_u + w_v + w_w + w_x + w_y + w_z) \\ = P \lambda^4 / B \quad (\text{carico distribuito}) \\ = \frac{P \lambda^2}{B} \quad (\text{carico } P \text{ concentrato}) \end{aligned} \quad [7.13]$$

Di equazioni del tipo [7.13] se ne hanno tante quanti sono i nodi

(7.1) Si può vedere, ad es., F. FOZZATI, Teoria e tecnica delle strutture, vol. 2, parte prima, cap. XI.



della lastra. Però per i nodi impediti di spostarsi, l'equazione di Lagrange non va scritta, in quanto essa scaturisce dalla condizione di equilibrio alla traslazione secondo  $z$  ( $\sum z = 0$ ), e tale condizione può essere sempre soddisfatta per la presenza della reazione del vincolo.

Se il nodo  $k$  è lungo un lato o si trova immediatamente prossimo a questo, nella [7.12] sono presenti alcune incognite relative a nodi non situati sulla lastra: tali aggiuntive incognite (che diremo ausiliarie) sono necessarie per imporre le condizioni di vincolo, e si otterrà così che il totale delle equazioni (equazioni [7.12] e condizioni ai limiti) coincide con il numero complessivo delle incognite stesse.

Ciò corrisponde a pensare che la lastra prosegua oltre il contorno; e le parti adiacenti costrette a deformarsi in modo da realizzare lungo il contorno stesso le condizioni ai limiti richieste.

Risolto il sistema di equazioni, e determinati così gli spostamenti  $w$  in corrispondenza dei nodi, si trovano le sollecitazioni specifiche mediante le relazioni che seguono (valide per  $V = 0$ ):

$$m_x = B \cdot (w_k - w_a - w_b) / \lambda^2, \quad [7.13]$$

$$m_{xy} = B \cdot (w_1 + w_m - w_1 - w_n) / 4 \lambda^2, \quad [7.14]$$

$$t_x = B \cdot [4(w_b - w_3) + w_c + w_1 + w_1 - w_d - w_m - w_n] / 2 \lambda^3, \quad [7.15]$$

$$r_x = t_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = B \cdot [6(w_b - w_a) + 2(w_1 + w_1 - w_m - w_n) + w_c - w_d] / 2 \lambda^3; \quad [7.16]$$

e le corrispondenti espressioni delle azioni interne  $m_y, t_y$ ,

$t_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$ , relative all'elemento di superficie largo 1 normale all'asse  $y$ , si ottengono facilmente per analogia.

E' evidente che il grado di approssimazione ottenibile con il procedimento esposto risulta tanto maggiore quanto più raffittito si assume il reticolo dei nodi e quanto più regolare è la funzione che rappresenta il carico.

#### 7.7.2. Le condizioni al contorno

Si considerano le possibili condizioni di vincolo nelle quali può trovarsi un lato, per esempio parallelo all'asse  $y$ .

##### a) Un lato della lastra è appoggiato

Se il nodo  $k$  è posto sul lato appoggiato, risulta

$$w_k = 0, \quad (m_x)_k = 0,$$

quindi per la [7.13] si ha:

$$w_k = 0, \quad w_a = -w_b. \quad [7.17]$$

##### b) Un lato della lastra è incastrato

Se il nodo  $k$  è posto su tale lato, deve risultare

$$w_k = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k = \frac{w_b - w_a}{2\lambda} = 0;$$

quindi le due condizioni diventano:

$$w_k = 0, \quad w_a = w_b. \quad [7.18]$$

##### c) Un lato della lastra è libero

Se il nodo  $k$  è posto su tale lato, deve essere

$$m_{xk} = 0, \quad t_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0;$$

quindi le due condizioni al contorno risultano:

$$w_a = 2w_k - w_b,$$

$$w_c = 6(w_a - w_b) + 2(w_m + w_n - w_1 - w_1) + w_d. \quad [7.2]$$

Se il lato libero è sottoposto ad una distribuzione esterna uniforme di coppie  $m_{x0}$  e di carichi  $q_{x0}$ , le condizioni al contorno diventano:

$$m_{x0} = B(2w_k - w_a - w_b) / \lambda^2,$$

$$B[6(w_b - w_a) + 2(w_1 + w_1 - w_m - w_n) + w_c - w_d] / 2 \lambda^3 = q_{x0} \quad [7.20]$$

#### 7.7.3. Il modo di procedere

Viene considerato un reticolo che comprende i nodi sulla lastra e i nodi ausiliari, esterni ad essa.

Le file dei nodi ausiliari sono al massimo due: ciò risulta quando occorre scrivere l'equazione [7.12] anche per i nodi sul contorno della lastra.

Si scrivono dapprima le equazioni ai limiti; poi l'equazione [7.12] per ogni nodo della lastra, eccezion fatta per quelli impediti di spostarsi.

Noti gli abbassamenti  $w$ , è possibile valutare qualunque azione interna in corrispondenza dei nodi utilizzando le formule [7.13] ... [7.16].

#### Esempio 7.1

Una lastra quadrata di lato  $a$ , caricata uniformemente, è incastrata lungo due lati opposti e appoggiata sui rimanenti (fig. 7.13).

Si assume  $\lambda = a/4$  e  $\nu = 0$ .

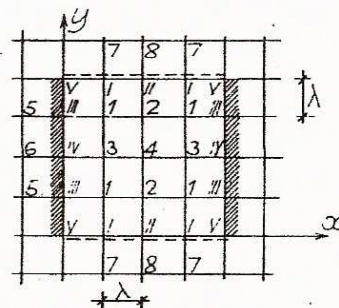


Fig. 7.13

a) Le condizioni di vincolo forniscono per le incognite ausiliarie

$$w_5 = w_1, \quad w_6 = w_3, \quad w_7 = -w_1, \quad w_8 = -w_3.$$

b) Le equazioni [7.12] sono:

$$20w_1 - 8(0 + w_2 + w_3 + 0) + 2(0 + 0 + w_4 + 0) + w_1 + w_1 + w_1 - w_1 = p\lambda^4/B,$$

$$20w_2 - 8(w_1 + w_1 + w_4 + 0) + 2(w_3 + 0 + w_3 + 0) + 0 + 0 + w_2 - w_2 = p\lambda^4/B,$$

$$20w_3 - 8(0 + w_4 + w_1 + w_1) + 2(0 + 0 + w_2 + w_2) + w_3 + w_3 + 0 + 0 = p\lambda^4/B,$$

$$20w_4 - 8(w_3 + w_3 + w_2 + w_2) + 2(w_1 + w_1 + w_1 + w_1) + 0 + 0 + 0 + 0 = p\lambda^4/B.$$

Il sistema delle 4 equazioni nelle incognite  $w_1, w_2, w_3$  e  $w_4$  risulta:

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$p\lambda^4/B$
22	-8	-8	2	1
-16	20	4	-8	1
-16	4	22	-8	1
8	-16	-16	20	1



La soluzione è:

$k$	1	2	3	4	
$w_k$	0,3083	0,4663	0,4145	0,6313	$pa^4/B$

I momenti si calcolano facilmente con la [7.13]; ad esempio nel punto 4 (centro della lastra) risulta:

$$m_x = (2w_4 - w_3 - w_2)B/\lambda^2 = 0,4336 p \frac{a^2}{16} = 0,027 pa^2 \quad (\text{invece di } 0,0285 pa^2),$$

$$m_y = (2w_4 - 2w_2)B/\lambda^2 = 0,330 p \frac{a^2}{16} = 0,0206 pa^2.$$

### 7.8. I momenti attorno a un punto

Il momento flettente e quello torcente nell'interno di un punto variano con l'orientamento della sezione che si considera e si possono facilmente calcolare, quando siano noti i valori di  $m_x, m_y, m_{xy}$  sulle sezioni normali agli assi. Per l'elemento della lastra indicato nella Fig. 7.14, soggetto ai momenti  $m_x, m_y, m_{xy}$ , il momento flettente  $m_n$  e il momento torcente  $m_{nt}$  (agenti sulla faccia normale all'asse  $n$  inclinato del generico angolo  $\alpha$  rispetto all'asse  $x$ ) si ottengono subito scrivendo le condizioni di equilibrio alla rotazione intorno agli assi  $t, n$ :

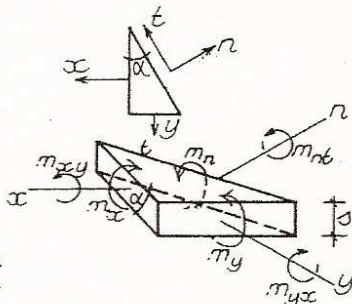


Fig. 7.14

$$m_n = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + m_{xy} \sin 2\alpha$$

$$m_{nt} = \frac{1}{2} (m_x - m_y) \sin 2\alpha - m_{xy} \cos 2\alpha$$

[7.2]

Le relazioni [7.2] sono perfettamente analoghe a quelle che legano le  $\sigma$  e le  $\tau$  in un sistema piano di tensioni: infatti i momenti  $m_n, m_{nt}, m_x, m_y, m_{xy}$  si ottengono dai valori assoluti massimi delle tensioni  $\sigma_n, \tau_{nt}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  (agenti in corrispondenza dei lembi) moltiplicandoli per  $ts^2/6$ .

Per ogni punto esistono due direzioni ortogonali principali  $t_1, t_2$  li che sulle sezioni normali ad esse i momenti flettenti  $m_1, m_2$  sono rispettivamente massimo e minimo. Dove il momento flettente acquista i valori estremi il momento torcente risulta nullo, quindi le "sezioni principali" sono esenti da momento torcente.

Le direzioni principali formano con  $x, y$  gli angoli  $\alpha_0$  e  $(\alpha_0 + 90)$ , con  $\alpha_0$  definito dalla relazione

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y},$$

e i momenti principali valgono

$$m_{1,2} = \left\{ \begin{aligned} &= \frac{m_x + m_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2} \end{aligned} \right.$$

Se  $m_x = m_y = m$  e  $m_{xy} = 0$  (ossia se  $x, y$  sono direzioni principali), dalle [7.2] si ha  $m_{nt} = 0$ ,  $m_n = m$ ; quindi tutte le direzioni sono principali e la flessione è uniforme. Se il momento  $m_{xy}$  è diverso da zero, ma sono nulli i momenti flettenti ( $m_x = 0, m_y = 0$ ), le direzioni principali sono inclinate di  $\pm 45^\circ$  rispetto agli assi  $x, y$  e risulta  $m_1 = -m_2 = m_{xy}$ .

### 7.9. VALORI DELLE SOLLECITAZIONI PER ALCUNI CASI RICORRENTI

La bibliografia tecnica riguardante le lastre piane conta ormai un estesissimo numero di studi nei quali si trovano esaminati i casi di vincolo e di carico più importanti.

#### 7.9.1. La lastra quadrata appoggiata al contorno caricata uniformemente

La soluzione venne ottenuta da Navier (1820) sotto forma di serie trigonometriche doppie e in serie semplici da Lévy (1899) e da Nadai (1915).

I diagrammi delle azioni interne relativi alle più significative sezioni e il quadro delle linee isostatiche si trovano indicati nelle figg. 7.15 e 7.16; riportiamo qualche isolato valore di particolare interesse.

Nel centro la flessione è uniforme, ossia i momenti sono uguali in tutte le direzioni: infatti essendo sulle sezioni normali a  $x$  e a  $y$   $m_{xy} = 0$ ,  $x$  e  $y$  risultano direzioni principali e si ha inoltre  $m_x = m_y = m_c$ , con

$$m_c = \frac{pa^2(1+\nu)}{27,14}$$

pari circa al momento che

avrebbe la striscia appoggiata su due lati opposti diviso per  $\pi$ .

Poiché l'armonica fondamentale della serie trigonometrica esprime il momento è fortemente prevalente sugli altri termini, lungo le mediane il diagramma del momento poco si scosta da quello sinusoidale.

Il valore massimo del momento torcente risulta in corrispondenza dello spigolo e vale

$$(m_{xy})_A = \frac{pa^2(1-\nu)}{21,6}$$

Nella fig. 7.15 è riportato l'andamento del momento torcente

lungo il lato  $y=0$ , e a proposito di tale azione è necessario aver presente l'interpretazione semplificata di Thomson e Tait delle condizioni al contorno determinate da Kirchhoff: poiché in genere il momento torcente non esiste, si deve considerare in un secondo tempo la lastra scarica soggetta soltanto a tale azione cambiata di segno, operazione questa che comporta praticamente soltanto un caricamento dei vincoli e un'alterazione limitata a un'esilissima striscia di bordo della lastra.

Il diagramma della complessiva reazione del vincolo ha la sua ordinata massima nel centro pari, per  $\nu = 0$ , a  $0,46 pa$ ; negli spigoli è applicata la reazione concentrata  $R = 2m_{xy}$  rivolta verso il basso, quindi la lastra deve avere gli angoli impediti di sollevarsi perché, se così non fosse, le sollecitazioni verrebbero sensibilmente modificate.

In prossimità dello spigolo, essendo nulli  $m_x$  ed  $m_y$  e diverso da 0 il momento torcente, le direzioni principali sono a  $\pm 45^\circ$  rispetto alle direzioni dei lati e i momenti principali valgono:

$$(m_u)_A = -\frac{pa^2(1-\nu)}{21,6} \quad (\text{negativo, agente nel piano normale avente per traccia la diagonale}),$$

$$(m_v)_A = \frac{pa^2(1-\nu)}{21,6} \quad (\text{positivo agente nei piani paralleli al piano } v-z).$$

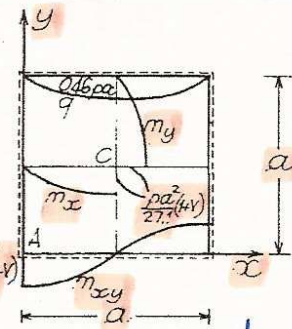


Fig. 7.15

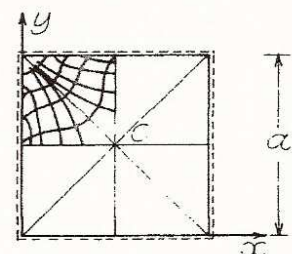
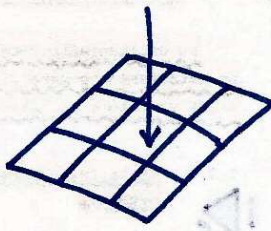


Fig. 7.16







Può essere interessante notare che per  $v = 0$  tali momenti sono maggiori di quelli che si hanno nel centro; il loro andamento lungo la diagonale è indicato nella fig. 7.17 e, mentre  $m_x$  cambia di segno alla distanza dello spigolo pari a  $-0,18 a$ ,  $m_y$  mantiene un valore pressoché uniforme. Della presenza, per il momento  $m_u$ , di valori negativi in ciascun angolo della lastra, può essere data una semplice giustificazione: le strisce diagonali sono sostenute dalle strisce ad esse ortogonali, e l'azione di sostentamento di queste si fa tanto più valida quanto più esse diventano corte; in corrispondenza dello spigolo la loro lunghezza diventa infinitesima, impedendo così alla striscia diagonale ogni movimento. Di tale ultimo fatto si ha conferma anche notando che, sempre nello spigolo, si ha  $(q_x)_A = (q_y)_A = 0$ , pertanto le rotazioni della fibra parallela a  $z$  passante per A risultano nulle in qualunque direzione.

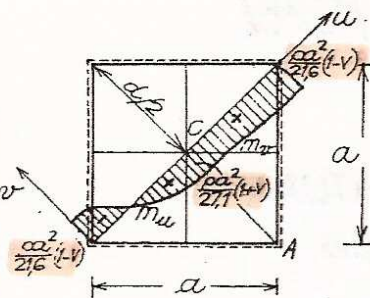


Fig. 7.17

Essendo le lastre di piccolo spessore, le tensioni tangenziali hanno di solito scarsa rilevanza. Ricordiamo infine che lo spostamento nel centro della lastra vale  $w_{max} = 0,00406 (pa^4)/B$ , pari all'incirca alla freccia che avrebbe la lastra appoggiata su due lati opposti divisa per  $\pi$ .

#### 7.9.2. La lastra rettangolare appoggiata al contorno caricata uniformemente

Le strisce più sollecitate sono le più corte e quindi le più corte; a mano a mano che il rapporto  $b/a$  aumenta, il valore del momento massimo rapidamente si avvicina a  $pa^2/8$ , che compete alla striscia di lunghezza infinita; già per  $b/a = 2$  e  $v = 0$ , il momento vale  $-pa^2/9,8$ , e si fa quindi tenue il beneficio derivante dal funzionamento come corpo bidimensionale.

Nella fig. 7.18 sono riportati i diagrammi dei momenti  $m_x$ ,  $m_y$  e della freccia  $f$  al variare del rapporto  $b/a$ ;  $m_x$  naturalmente tende al valore  $pa^2/8$ ,  $m_y$  a 0 (per  $v = 0$ ) e la freccia risulta  $\frac{5}{384} \frac{pa^4}{B}$ .

Negli angoli i momenti torcenti e i conseguenti momenti principali aumentano con il crescere del rapporto  $b/a$  e tendono al valore  $m_u = -m_v = -\frac{pa^2}{14,7} (1-v)$ ; le direzioni principali sono ancora a  $\pm 45^\circ$  rispetto alle direzioni  $x, y$ . Per la presenza della reazione  $R$  occorrono, oltre alle armature all'estradosso e all'intradosso in corrispondenza dell'angolo, anche adeguati ancoraggi che impediscano il sollevamento dello spigolo.

#### 7.9.3. Le travi perimetrali della lastra rettangolare

Lungo il contorno la lastra rettangolare è soggetta alla reazione  $r$  di Kirchhoff e trasmette quindi tale reazione cambiata di segno ai vincoli.

Se il contorno è sostenuto da travi, queste debbono essere in grado di resistere ai carichi  $r$  con movimenti limitati, sensibilmente inferiori alla freccia della lastra. Se il carico è ripartito uniformemente, la reazione  $r$  può venire valutata con sufficiente approssimazione attribuendo a ciascuna trave la parte di carico compresa fra la mediana ad essa parallela e le bisettrici degli angoli, pertanto sulle travi di lunghezza maggiore il diagramma risulta trapezoidale e triangolare sulle altre due (fig. 7.19).

Per le note questioni relative alle condizioni di Kirchhoff, è opportuno maggiorare i carichi così ottenuti del 10% quando il rapporto dei lati è poco diverso da 1.

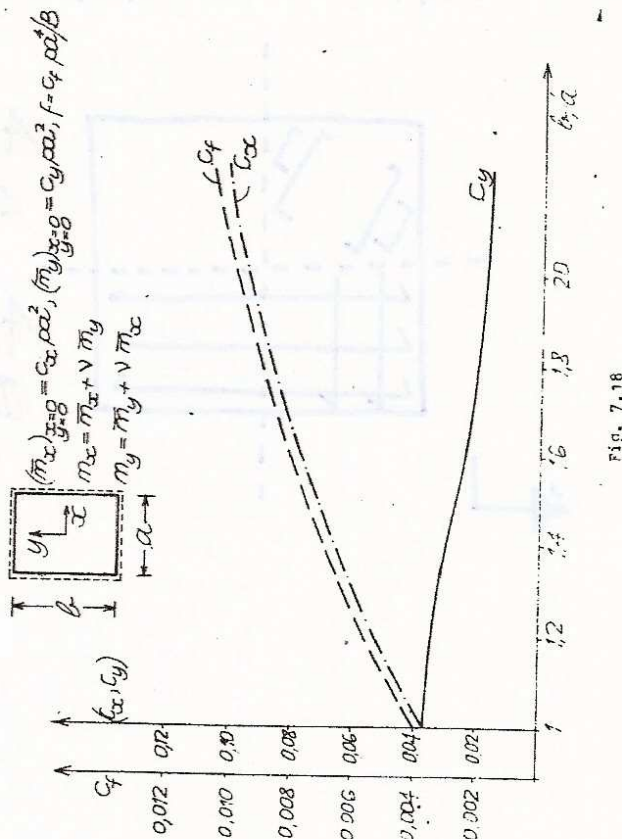


Fig. 7.18

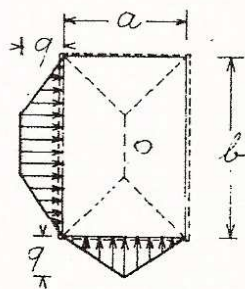


Fig. 7.19

#### 7.9.4. Lastra sottile soggetta ad un carico concentrato

In corrispondenza del punto di applicazione del carico concentrato tutte le azioni interne acquistano valore infinito non solo per la lastra rettangolare in condizione qualunque di vincolo, ma anche per ogni altro tipo di lastra. Che ciò debba accadere ci si può rendere conto facilmente per l'azione tagliente, estraendo un elemento cilindrico di lastra di raggio infinitesimo intorno al carico e valutando quindi l'azione tagliente media, che risulta infinita, essendo il raggio infinitesimo.

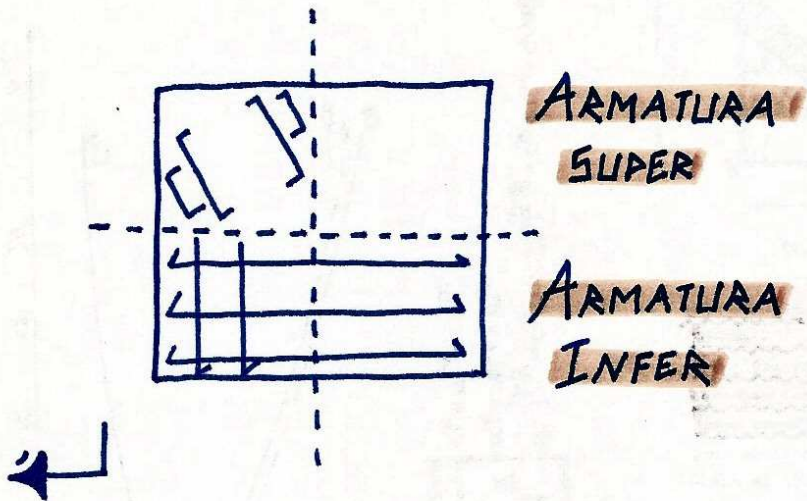
Il caso del carico concentrato rappresenta una astrazione teorica che non ha rispondenza in pratica perché i pesi agiscono sempre su aree finite; tuttavia il risultato sta ad indicare la sensibilità della lastra alle azioni concentrate e l'importanza degli strati inerti, sistemati per ripartire i carichi; di solito si ammette che all'interno di tale strato la diffusione del carico avvenga con inclinazione di  $45^\circ$ .

Un caso di notevole importanza pratica, spesso ricorrente negli impalcati dei ponti, è quello di una lastra molto allungata (di solito chiamata soletta) sottoposta a carichi agenti su area limitata.

In prima approssimazione può essere consentito, quando non si



# ARMATURA TIPICA:





effettui il calcolo come piastra elastica, di valutare il beneficio conseguente al funzionamento come lastra nel modo seguente: se  $a$  è la luce e se  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$  (fig. 7.20) sono i lati del rettangolo caricato, il carico può essere considerato agente su un più ampio rettangolo avente il lato secondo  $x$  pari a  $\lambda'_x = \lambda_x + 2s_1 + s = \lambda_x + 2s_1 + s$ , e quello secondo l'asse  $y$  (lungo il quale la lastra è supposta illimitata) pari a  $\lambda'_y = \lambda_y + 2s_1 + s + \frac{a}{3}$ , essendo  $s_1$  lo spessore dello strato inerte e  $s$  lo spessore della lastra.

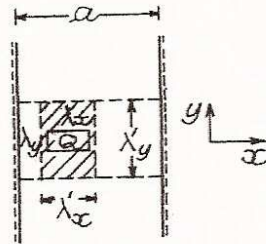


Fig. 7.20

La larghezza  $\lambda'_y$  non deve essere maggiore della luce  $a$  e l'aumento del terzo della luce non deve essere effettuato quando il carico è prossimo ad un appoggio. La striscia larga  $\lambda'_y$  viene poi considerata isolata.

Particolare importanza acquista in tal caso anche l'armatura parallela ai lati maggiori, armatura che dal calcolo approssimativo non è possibile dedurre: secondo correnti indicazioni, l'armatura unitaria di ripartizione per metro, disposta nella direzione del lato maggiore, deve essere non inferiore ad  $1/4$  dell'armatura unitaria principale; l'armatura di ripartizione è posta prevalentemente nella zona centrale e all'intradosso, ma non va dimenticata l'importante funzione che essa assolve anche per fissare i ferri principali nella loro posizione prevista.

#### 7.9.4. Lastra quadrata incastrata al contorno caricata uniformemente (PRIMA ERANO APPOGGI)

I diagrammi delle principali azioni interne sono raffigurati nella fig. 7.21; al solito riportiamo qualche dato di particolare

interesse:

$$m_c = \frac{pa^2(1+\nu)}{56}$$

$$m_1(\max) = -\frac{pa^2}{19,4}$$

$$F = 0,00126 \frac{pa^4}{B}$$

Lungo il contorno, essendo in ogni punto  $v''_{xy} = 0$ , il momento torcente risulta

nullo; quindi, per le cose

dette per la lastra appoggiata, risulta nullo anche lo stato flessionale negli angoli.

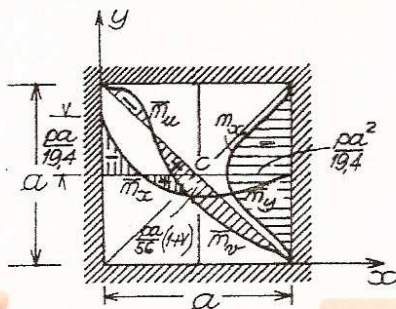


Fig. 7.21

#### 7.10. IL SOLAIO A FUNGO

##### 7.10.1. Premessa

Un tipo di lastra che si usa spesso negli edifici industriali è il solaio a fungo, nel quale gli appoggi intermedi, e spesso anche quelli perimetrali, sono isolati e disposti di solito in modo regolare, ossia in file parallele ed equidistanti, nei vertici di rettangoli o quadrati uguali tra loro. Generalmente la costruzione è a più piani e i pilastri continuano al di sopra dei solai intermedi.

Le dimensioni delle sezioni dei pilastri sono relativamente piccole, per cui in corrispondenza di essi la lastra sarebbe soggetta a momenti flettenti e a sforzi di taglio assai elevati. Per ridurre i valori di tali sollecitazioni, le sommità delle colonne sono dotate di capitelli che conferiscono al sostegno quel particolare aspetto da cui ha tratto origine la denominazione del tipo del solaio. I capitelli possono assumere forme diverse (tronco di cono,

tronco di piramide); le loro generatrici è bene che, di norma, non siano inclinate più di  $45^\circ$  rispetto alla verticale, e se quest'inclinazione viene superata, si consideri la diffusione dei carichi soltanto entro le rette a  $45^\circ$  (fig. 7.22). Per contenere i valori massimi dei tagli e dei momenti entro limiti tollerabili, di solito la larghezza della sommità del fungo risulta maggiore o uguale a  $1/4 + 1/5$  della distanza dei pilastri; e lo spessore  $s$  della lastra si assume pari a  $s \geq a/35$  e quella della soletta posta in sommità del capitello,  $s_1 \geq s/2$  (fig. 7.22).

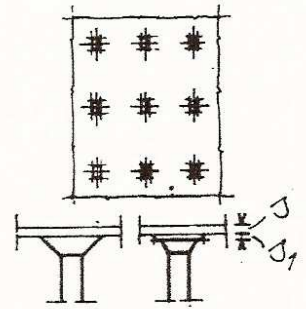


Fig. 7.22

##### 7.10.2. Solaio a fungo illimitato avente campi tutti uguali di dimensione $a \times b$ e uniformemente caricato

Isolata una maglia, con riferimento alla fig. 7.23, le condizioni cui deve soddisfare la superficie elastica  $v(x, y)$  risultano evidentemente:

$$v = 0 \quad \text{nei punti } A, B, C, D;$$

$$\frac{dv}{dx} = 0, \quad t_x = 0 \quad \text{nei punti delle rette } x=0, x=a;$$

$$\frac{dv}{dy} = 0, \quad t_y = 0 \quad \text{nei punti delle rette } y=0, y=b.$$

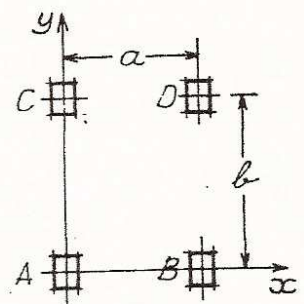


Fig. 7.23

La soluzione venne ottenuta in serie doppie (Leve, 1920) e semplici (Nadai, 1922).

Leve ha ricavato le sollecitazioni per vari rapporti fra i lati del campo e del capitello supponendo le reazioni di questo ripartite uniformemente. Per capitelli e campi quadrati con rapporto dei lati pari a  $1/4$ , i diagrammi dei momenti sono riportati nella fig. 7.24 e i valori più significativi sono, per  $\nu = 0$  (Leve):

$$(m_x)_A = (m_y)_A = -\frac{pa^2}{11}$$

$$(m_x)_B = \frac{pa^2}{19,8}, \quad (m_x)_D = -\frac{pa^2}{25,6}$$

$$(m_x)_C = (m_y)_C = \frac{pa^2}{38}$$

$$v_C = 0,0049 \frac{pa^4}{B}$$

$$v_B = 0,0035 \frac{pa^4}{B}$$

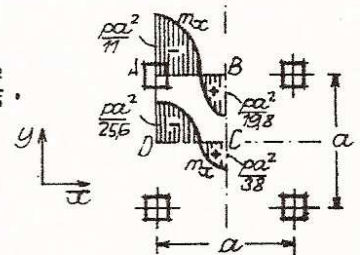


Fig. 7.24

##### 7.10.3. Solaio a fungo comprendente un numero infinito di campi caricato a strisce

La condizione di sovraccarico generale (punto b) fornisce con buona approssimazione i massimi momenti negativi; per avere i massimi momenti positivi, si deve considerare invece il carico alternato a strisce. Scomponendo quindi tale condizione in una simmetrica e in un'altra antisimmetrica, per la prima i momenti sono quelli riportati nel punto precedente sostituendo  $p/2$  a  $p$ ; il comportamento della seconda (fig. 7.25), se

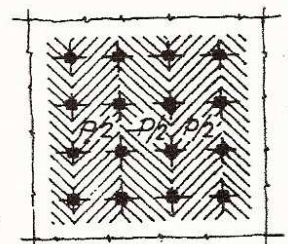


Fig. 7.25



si suppone trascurabile la rigidità dei pilastri e nulla la reazione del capitello, si identifica ovviamente con quello di strisce semplicemente appoggiate, sottoposte anch'esse al carico, naturalmente alternato,  $\pm p/2$ . Quindi il momento e lo spostamento massimi risultano

$$m_c = \frac{p \cdot a^2}{76} + \frac{p \cdot a^2}{16} = \frac{p \cdot a^2}{13}, \quad w_c = \frac{p \cdot a^4}{B} (0,0025 + 0,0065)$$

#### 7.10.4. Procedimento di calcolo semplificato

I risultati dei calcoli precedentemente riportati riguardano schemi limiti che, pur essendo utili per orientamenti e confronti, si possono sensibilmente scostare dallo stato di cose reale, essendo il numero dei campi finito, le reazioni dei capitelli non uniformi e la rigidità dei pilastri, quando venga chiamata in causa, non nulla. Per tali ragioni si ricorre in pratica spesso a metodi approssimati che possano tener conto della teoria senza peraltro ignorare i vari aspetti effettivi del problema.

Il procedimento adottato, nel caso che le dimensioni dei campi e le condizioni di carico si mantengono analoghe, è quello di considerare il solaio come trave continua, per esempio secondo  $x$  (fig. 7.25), larga quanto lo spessore della lastra e solidale con i pilastri superiori e inferiori.

Decisa la condizione di carico accidentale da adottare, per questa e per i carichi permanenti, si potranno determinare le sollecitazioni impiegando gli ordinari metodi di calcolo dei telai, avendo però presente che, per quanto riguarda i casi di spostamenti dei nodi non trascurabili, l'ipotesi dell'infinita rigidità delle travi può essere frequentemente non legittima.

Ricavati i momenti negativi e positivi massimi, è evidente che non sarà lecito considerarli ripartiti uniformemente nell'intera larghezza; quindi la lastra viene divisa in tre parti, una "di colonna", larga  $a/2$ , e altre due "di campo", complessivamente larghe ancora  $a/2$ . I momenti positivi trovati per l'intera larghezza  $a$  si attribuiscono per il 55% per la striscia "di colonna" e per il 45% alle due "di campo"; all'incastro, le ripartizioni si fanno sensibilmente più disuniformi e le due quote di ripartizione sono 75% e 25%.

Il calcolo deve essere ripetuto anche secondo l'altra direzione  $y$ , considerando sulla nuova trave continua ancora il carico completo.

Ricordiamo infine che, sempre nell'ambito di valutazioni pratiche, occorre verificare la sezione resistente ove la lastra si spinge dal capitello. Se si pensa di isolare questo, il complessivo sforzo di taglio vale  $T = p(ab - cd)$ ; lo sforzo di taglio unitario medio risulta quindi  $t = \frac{T}{2(c+d)}$ . Per il calcolo del capitello si riferisce a quanto è stato detto per i plinti di fondazione.

Per le armature la disposizione più opportuna sarebbe quella di barre disposte lungo le strisce di colonna e, nel centro, secondo le direzioni diagonali; tuttavia, per evitare fastidiosi ingombranti, si preferisce sistemare, per l'intera lastra, i ferri paralleli agli assi  $x$  e  $y$ .

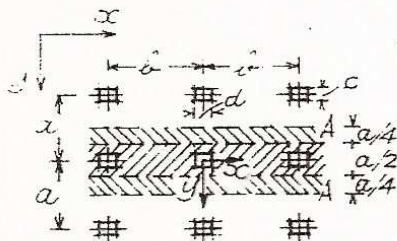


Fig. 7.26

#### 7.11. INDICAZIONI DI CARATTERE COSTRUTTIVO

##### 7.11.1. Criteri relativi al dimensionamento e alla distribuzione delle armature nelle lastre piane rettangolari di calcestruzzo armato

Noti i diagrammi dei momenti flettenti, occorre definire la relazione al valore del massimo momento, lo spessore della lastra, assunto per esso un valore di tentativo  $g$ , si verificano, con i normali procedimenti in uso per le sezioni in cemento armato, le tensioni nel calcestruzzo. In via approssimata, si possono verificare immediatamente, per un dato spessore, le tensioni massime nel calcestruzzo mediante la formula semplificata  $\sigma_c = \frac{m}{1.5 \cdot g^2}$  (1.2).

Poiché normalmente si fa riferimento ad una striscia di larghezza pari ad 1 metro, ricavata l'area del ferro necessaria per 1 m di larghezza, si adotta di solito per i ferri un interasse maggiore superiore allo spessore.

Le armature principali vengono di norma disposte parallelamente ai lati, avendo l'avvertenza che ovunque il diagramma dei momenti resistenti ricopra convenientemente quello dei momenti flettenti.)

Il momento flettente  $m_x$ , ad esempio, varia sia secondo  $x$  che secondo  $y$ : della variazione di  $m_x$ , secondo  $x$ , si tiene conto interrompendo o piegando opportunamente i ferri; della variazione di  $m_x$  secondo  $y$  si tiene conto variando l'interasse dei ferri o variando il diametro delle armature. Analogamente si opera per il momento  $m_y$ .

Armature aggiuntive (ad esempio negli angoli delle lastre appoggiate) si rendono necessarie in quelle zone in cui le direzioni principali si scostano sensibilmente dalle armature dirette parallelamente ai lati, e i relativi momenti flettenti risultano di valore elevato.

Si consideri ad esempio il caso della lastra quadrata appoggiata e uniformemente caricata: il diagramma del momento flettente, ad esempio  $m_x$ , relativo alla striscia centrale di larghezza unitaria ha un andamento - in prima approssimazione - sinusoidale con valore massimo pari a (per  $\nu = 0,1$ )  $pa^2/24,6$ . I ferri (fig. 7.27) si dispongono in genere rialzandone una parte in prossimità dell'appoggio.

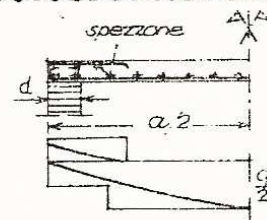


Fig. 7.27

Nei casi correnti, quando il carico sia ripartito e la lastra di non grandi dimensioni, l'armatura in direzione  $x$ , relativa alla striscia centrale, si estende per una larghezza pari ad  $a/2$  (striscia 1 della fig. 7.28); le strisce 2, di larghezza  $a/4$ , vengono armate ascrivendo ad esse armature, per metro, pari a  $\sim 2/3$  di quelle relative alla striscia 1. Analogamente si realizzano le armature secondo  $y$ .

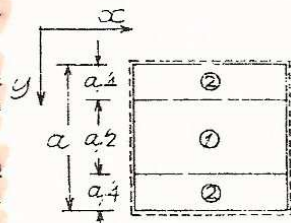


Fig. 7.28

In prossimità degli angoli, dove le direzioni principali sono dirette secondo la diagonale e la normale ad essa, è necessario disporre un'armatura aggiuntiva secondo tali direzioni; è evidente che i ferri secondo la diagonale risulteranno posti all'estradosso ( $m_u$  tende le fibre superiori), mentre quelli secondo la normale alla diagonale verranno disposti all'intradosso.

La zona interessata da tali armature aggiuntive si estende sino all'1/4 + 1/5 della diagonale, dove  $m_u = 0$  e  $m_v$  viene assunto dai ferri di intradosso disposti parallelamente ai lati.

Se il materiale sia duttile, la verifica di resistenza per la zona di estradosso, non può prescindere dalla verifica della zona di intradosso, e quindi del riferimento.



In pratica è sempre opportuno prevedere l'esistenza di un te nue momento d'incastro.

Nel caso della lastra appoggiata rettangolare, si effettua dap prima il calcolo delle arma ture secondo  $x$  e  $y$  in cor rispondenza delle strisce u nitarie centrali; e, quando sussistano le condizioni pre cedentemente accennate, le armature così ottenute (fig. 7.29) secondo  $y$  si conserva no costanti per la striscia centrale larga  $a/2$ , riduceu dole ai  $2/3$  per le strisce la terali larghe  $a/4$ ; mentre, se cono  $x$ , le armature relative alla striscia unitaria centrale si estendono per una larghezza pari a  $(b-a/2)$ , riducendole ai  $2/3$  per le strisce laterali larghe  $a/4$ .

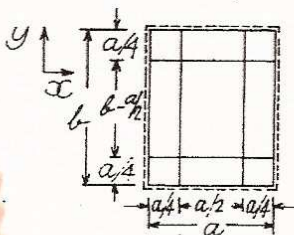


Fig. 7.29

In corrispondenza degli angoli di dispongono le armature ag giuntive secondo quanto indicato per le lastre quadrate, tenendo conto che le direzioni principali risultano essere quelle secondo la bisettrice e la sua normale.

Per le lastre incastrate, calcolati i ferri secondo le direzio ni  $x$  e  $y$ , con riferimento ai relativi diagrammi dei momenti flet tenti per le strisce unitarie centrali, si estendono trasversalmen te con criteri analoghi a quelli della lastra appoggiata; non sono necessarie armature aggiuntive negli angoli.

Di solito le lastre non vengono

armate a taglio, in quanto le ten sioni tangenziali risultano normal

mente inferiori ai valori limiti

ammissibili; nell'ipotesi che que

sto non accada, è conveniente au

mentare lo spessore fino a ridurre

i valori delle  $\tau$  entro limiti accettabili; comunque le armature a taglio si possono realizzare con ferri disposti, ad esempio, co ne è indicato nella fig. 7.30.

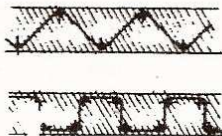


Fig. 7.30

Nella pratica costruttiva, inoltre, su tutto il contorno del la lastra si realizza un cordolo opportunamente armato con ferri diritti e staffe in cui devono essere ancorati i ferri di armatu ra della lastra.

## IL CARICO SI DIFFONDE

### B) LASTRE CIRCOLARI INFLESSE, SOTTOPOSTE A FORZE DISTRIBUITE SIMMETRICAMENTE ATTORNO AL CENTRO

7.12. Ovviamente valgono ancora le ipotesi a suo tempo illustrate per le lastre sottili inflesse. Consideriamo una lastra cir colare di raggio  $a$  e di spessore  $s$ , soggetta a forze e a reazioni dei vincoli aventi simmetria "polare" (rispetto al centro  $O$ , fig. 7.31). Così stando le cose è evidente che lo stato di sollecitazio ne è in funzione soltanto del

la distanza  $r$  dal centro, per cui tagliata la lastra con un piano diametrale, in un generico punto di tale se zione in cui si indichino con

$t, z$  i tre assi di riferi ento (fig. 7.31), le tensio

i tangenziali  $\tau_{tz}, \tau_{tr}$  sono nulle per ragioni di simmetria, ed nulla anche, per il principio di reciprocità,  $\tau_{rt}$ ; in ogni pun to le direzioni  $t, r$  sono quindi principali. Le azioni interne i riducono in definitiva a  $m_r, m_t, t_r$ . Il taglio  $t_r$  è però taticamente determinato: considerata infatti una sezione cilindri a, per l'equilibrio alla traslazione verticale della parte centra e isolata, soggetta al carico  $Q(r)$ , si ha:

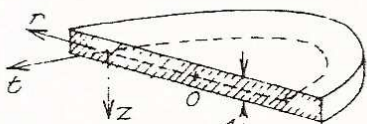


Fig. 7.31

$$t_r = \frac{Q(r)}{2\pi r} \quad [7.22]$$

Le ipotesi sono ancora quelle formulate nel paragrafo 7.3. Considerata l'origine dell'asse  $r$  nel centro  $O$ , e detta  $\varphi$  la rotazione della tangente alla superficie elastica nel piano  $r-z$  fig. 7.32) (positiva se il punto  $O_\varphi$  si trova al di sopra del piano me dio della lastra), per quanto è sta to detto al par. 7.3 si ha (a  $d\varphi$  positivo corrisponde una dilatazio ne sul lembo inferiore positiva)

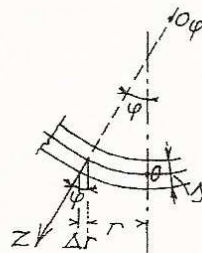


Fig. 7.32

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{s}{2} \frac{d\varphi}{dr}$$

essendo  $\bar{\epsilon}_r$  il valore della dilata zione secondo  $r$  sul lembo teso.

Poiché in un generico punto la rotazione  $\varphi$  della tangente e della normale sono evidentemente ugua li, le fibre amulari sui lembi variano il loro raggio della quanti tà  $\Delta r = \varphi s/2$ , e presentano quindi la dilatazione uniforme

$$\bar{\epsilon}_t = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\varphi}{r} \frac{s}{2}$$

Si ha allora, per le tensioni sui lembi,

$$\bar{\sigma}_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_r + \nu \bar{\epsilon}_t) = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{s}{2} (\varphi' + \nu \frac{\varphi}{r})$$

$$\bar{\sigma}_t = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{s}{2} (\frac{\varphi}{r} + \nu \varphi') ;$$

di conseguenza, essendo anche

$$\bar{\sigma}_r = \frac{6 m_r}{s^2}, \quad \bar{\sigma}_t = \frac{6 m_t}{s^2}$$

si ottiene

$$m_r = B(\varphi' + \nu \frac{\varphi}{r}), \quad m_t = B(\frac{\varphi}{r} + \nu \varphi') \quad [7.24]$$

in cui al solito  $B = \frac{E s^3}{12(1-\nu^2)}$ .

I termini presenti nelle due equazioni sono legati da segno po sitivo perché, considerato un elemento della lastra soggetto ai mo menti  $m_r, m_t$  positivi (secondo le convenzioni a suo tempo dette), le quantità  $\varphi, d\varphi$  relative allo stesso elemento sono positive. Le due equazioni [7.24] scaturiscono dalle condizioni di congruen za interna ossia sul modo di deformarsi della lastra. Considerato un elemento di questa, delimitato in pianta da due raggi e da due paralleli infinitamente vicini, è facile scrivere per esso la con dizione di equilibrio giroatorio ottenendo (fig. 7.33):

$$m_r + \frac{dm_r}{dr} r - m_t + t_r r = 0 ;$$

operate le sostituzioni, si ha anche

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - \frac{\varphi}{r^2} = - \frac{t_r}{B} \quad [7.25]$$

che può venir scritta nella forma

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \varphi) \right] = - \frac{t_r}{B} \quad [7.26]$$

Essendo poi  $\varphi = -w'$ , si ot

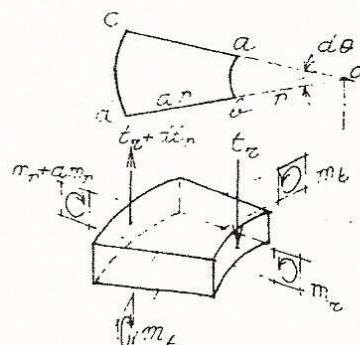


Fig. 7.33



tiene facilmente, nota la funzione  $\varphi$ , anche la superficie elastica; le costanti arbitrarie che si ottengono dalle citate equazioni differenziali, si determinano naturalmente con le condizioni ai limiti.

### 7.13. LASTRA SOTTOPOSTA AD UNA DISTRIBUZIONE UNIFORME DEI MOMENTI $m_0$ SUL CONTORNO (fig. 7.34)

Dall'equazione [7.26], con doppia operazione di integrazione si ottiene:

$$r \cdot \varphi = C_1 \frac{r^2}{2} + C_2, \quad \varphi = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}; \quad [7.27]$$

poichè si ha  $\varphi = 0$  per  $r=0$ , nelle [7.27] deve essere  $C_2=0$ , altrimenti per  $r=0$ ,  $\varphi$  risulterebbe infinito, e si ha allora (posto  $C = C_1/2$ ):

$$\varphi = Cr, \quad \varphi' = C$$

Sostituendo nelle [7.24] risulta

$$m_r = m_t = B \cdot C (1+\nu)$$

ossia i momenti principali sono in ogni punto uguali fra di loro, quindi lo stato di flessione uniforme; e poichè sul contorno deve essere  $m_r = m_0$ , in ogni punto e in ogni direzione si ha:

$$m_r = m_t = m_0;$$

inoltre

$$C = \frac{m_0}{B(1+\nu)}, \quad \varphi = \frac{m_0 r}{B(1+\nu)}, \quad = 2 \frac{m_0 r^2}{B(1+\nu)}$$

### 7.14. LASTRA INCASTRATA AL CONTORNO SOGGETTA A CARICO UNIFORME (fig. 7.35)

Nel centro:

$$m_r = m_t = (1+\nu) \frac{pa^2}{16},$$

$$f = \frac{pa^4}{64B} = \frac{9a^2}{64\pi B};$$

al contorno:

$$m_r = -\frac{pa^2}{8}, \quad m_t = -\nu \frac{pa^2}{8}$$

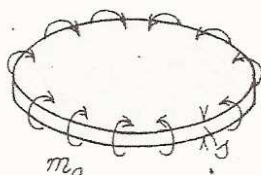


Fig. 7.34

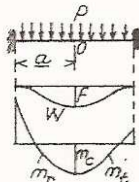


Fig. 7.35

### 7.15. LASTRA INCASTRATA AL CONTORNO SOGGETTA A CARICO P CONCENTRATO NEL CENTRO

Nel centro i valori delle azioni interne risultano infinite (fig. 7.36) e si ha inoltre:

al contorno

$$m_r = -\frac{P}{4\pi}, \quad m_t = -\nu \frac{P}{4\pi}$$

$$f = \frac{Pa^2}{16\pi B}$$

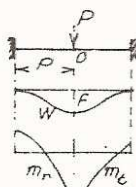


Fig. 7.36

Si ottiene così (fig. 7.37):  
nel centro

$$m_r' = m_t' = (3+\nu) \frac{pa^2}{16}$$

$$f = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{pa^4}{64B}$$

al contorno

$$m_r = 0, \quad m_t = \frac{pa^2}{8} (1-\nu)$$

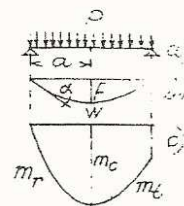


Fig. 7.37

### 7.17. LASTRA SOGGETTA A FORZE q E A MOMENTI m DISTRIBUITI UNIFORMEMENTE LUNGO UNA CIRCONFERENZA

Questi due casi (fig. 7.38), a parte il loro diretto interesse, consentono di studiare con grande facilità la lastra anulare soggetta a qualunque condizione di vincolo e di carico purchè, s'intende, simmetrica rispetto all'asse (7.3).

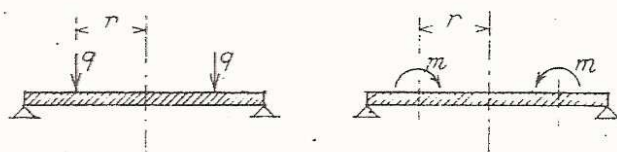


Fig. 7.38

### 7.18. LE ARMATURE

Nulla di sostanziale da aggiungere a quanto si disse nel paragrafo 7.11.1 Per la particolarità della forma e della condizione di carico, la disposizione delle armature più normale (fig. 7.39) è naturalmente quella costituita da barre radiali e circolari. Quando la lastra non sia forata, ossia presenta un solo bordo, la sovrapposizione dei ferri radiali risulterebbe proibitiva ed è allora necessario ricorrere ad un graticcio di ferri ortogonali, ciò che è del tutto logico poichè nel centro tutte le direzioni sono principali. I ferri radiali disposti usualmente nella parete inferiore alla lastra vengono in parte rialzati in vicinanza del bordo, per costituire, insieme con spezzoni aggiuntivi, l'armatura resistente all'eventuale momento di incastro. Di solito, se la lastra è piana e se  $\nu = 0$ , i momenti  $m_t$  rimangono positivi e pertanto le armature circolari sono prossime all'intradosso.

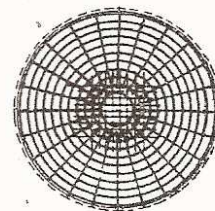


Fig. 7.39

In ogni caso occorre controllare che i diagrammi dei momenti siano esterni ai corrispondenti diagrammi effettivi.

(7.3) P. FOZZATI, Il calcolo semplificato delle lastre ad anello, "Giornale del Genio Civile", maggio 1954.